# Práctica 5

1. Calcular

   **a)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$ **c)** $\displaystyle\int_1^2 \log(it)dt$

2. **a)** Sean $\gamma$, $\sigma$ las poligonales de vértices $\{1, i\}$ y $\{1, 1+i, i\}$ respectivamente. Hallar una parametrización de $\gamma$ y de $\sigma$ y calcular $\displaystyle\int_\gamma f$ y $\displaystyle\int_\sigma f$ , donde $f(z) = |z|^2$.

   **b)** Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

3. Calcular: $\displaystyle\int_\gamma 3z dz$ y $\displaystyle\int_\gamma 3|z|dz$ , para

   **a)** $\gamma$ : segmento que une $-1$ con $1$.

   **b)** $\gamma$ : $|z| = 1$ de $-1$ a $1$, recorrido en el sentido horario.

   **c)** $\gamma$ : $|z| = 1$ de $-1$ a $1$, recorrido en el sentido antihorario.

   **d)** $\gamma$ : poligonal de vértices $-1$ , $i$ , $1$.

4. Calcular

   **a)** $\displaystyle\int_C e^z dz$, si $C : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, recorrida una vez en sentido horario.

   **b)** $\displaystyle\int_0^1 x dz$, uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices: $0$ , $i$ , $1$.

   **c)** $\displaystyle\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, recorriendo la curva una vez en sentido horario.

5. Sea $\gamma$ el polígono cerrado de vértices: $1 - i$ , $1 + i$ , $-1 + i$ , $-1 - i$ , $1 - i$.

   Hallar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

6. Sean $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma : [a, b] \to D$ diferenciable a trozos y $f : D \to \mathbb{C}$ continua. Se define:

$$\int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

   **a)** ¿Qué se obtiene cuando $f \equiv 1$?

**b)** Calcular $\displaystyle\int_\gamma |dz|$ para $\gamma : |z-a| = r$.

**c)** Probar que $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \int_\gamma |f||dz|$ y deducir que si $|f(z)| \leq M$ y $\ell = \operatorname{long}(\gamma)$, entonces $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leq M\ell$.

7. Calcular

   **a)** $\displaystyle\int_\gamma x dz$, $\gamma$ : segmento de 0 a $1+i$

   **b)** $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-1|\ |dz|$

   **c)** $\displaystyle\int_{C_i} z^n\ dz \quad (a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N})$

   $$C_1 : z(t) = ae^{it},\ 0 \leq t \leq \pi; \qquad C_2 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

   **d)** $\displaystyle\int_{C_i} \frac{dz}{z-2} \qquad C_1 : |z-2| = 4; \quad C_2 : |z-1| = 5$

   **e)** $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + iy^2)|dz| \qquad \gamma : |z| = 2$

   **f)** $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2\ dz$

8. Hallar $\displaystyle\int_\gamma z^{-\frac{1}{2}} dz$, donde:

   **a)** $\gamma : |z| = 1$ , $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ , de 1 a $-1$.

   **b)** $\gamma : |z| = 1$ , $\operatorname{Im}(z) \leq 0$ , de 1 a $-1$.

9. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar

   **a)** $\displaystyle\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$.

   **b)** Idem para $\gamma(t) = 2e^{it}$ , $-\pi \leq t \leq \pi$.

10. Sea $f$ holomorfa en un abierto conexo $\Omega$ tal que $|f(z) - 1| < 1$ en $\Omega$. Mostrar que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = 0$ para cualquier curva cerrada $\gamma$ contenida en $\Omega$.

    **Nota**: $f'$ es continua.

11. Sean $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo y $g : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ la rama del logaritmo que verifica $g(1) = 2\pi i$.

    Comparar $\displaystyle\int_\gamma f(z)\ dz$ y $\displaystyle\int_\gamma g(z)\ dz$, siendo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ una curva que une 1 con $i$.

12. Determinar el dominio de holomorfía de la función $f$ y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ cuando $C : |z| = 1$ , siendo:

    **a)** $f(z) = ze^{-z}$

    **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$

13. Calcular

    **a)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\ dz, \quad \gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

    **b)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\ dz, \quad \gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

    **c)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\ dz, \quad \gamma(t) = e^{it}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \in \mathbb{N}$

    **d)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}, \quad \gamma(t) = \tfrac{1}{2} + e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \in \mathbb{N}$

    **e)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log z}{z^n}\ dz,\ \gamma(t) = 1 + \tfrac{1}{2}e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \geq 0.$

    **f)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz, \quad \gamma(t) = re^{it}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}.$

14. **Desigualdades de Cauchy**

    **a)** Sea $f$ holomorfa en $B(a,R)$ y tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(a,R)$. Probar que en tal caso:
    $$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

    **b)** Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto $z$ no pueden satisfacer:
    $$|f^{(n)}(z)| > n! \cdot n^n$$

15. Sea $f$ entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C},\ A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que $f$ es un polinomio.

    Deducir que si $f$ es una función entera tal que para algún $k \geq 0$, $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{f(z)}{z^k}\right| = 0$, entonces $f$ es un polinomio de grado menor que $k$ (si $k > 0$) o $f \equiv 0$ (si $k = 0$).

    Deducir además que si $f$ es entera y acotada entonces $f$ es constante.

16. Hallar todas las $f$ holomorfas en $|z| \leq 1$ tales que $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ cuando $|z| = 1$ y $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$.

17. ¿Existe $f$ holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

18. Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto $a$ , para:

    **a)** $\dfrac{e^z - 1}{z}$, $a = 0$

    **b)** $ze^z$, $a = -1$

    **c)** $(z+1)^{-1}$, $a = 1$

    **d)** $\dfrac{1-z}{(z+1)^3}$, $a = 0$

19. Desarrollar la función $f(z) = z^{-1}$ en serie de potencias de $z + 1 - i$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie hallada?

20. Probar que si la serie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es convergente en $|z - z_0| < r$, entonces la serie $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ es convergente en este disco y su suma es una primitiva de $f$. ¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto $\Omega$ admite primitiva en todo $\Omega$?

21. **a)** Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados

    **(i)** $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(1 + iz)}$ en $z = 0$

    **(ii)** $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ en $z = \frac{3}{2} - i$

    **b)** Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $\Omega$ ?

22. **a)** Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que restringida a $\mathbb{R}$ tiene radio de convergencia $\infty$. Probar que $f$ es entera.

    **b)** Dar una interpretación del hecho que la función real $\dfrac{1}{1+x^2}$ es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ pero no es desarrollable en serie de potencias de radio $\infty$.